AB効果は理論上可能か？

明星大・理工　関　根　克　彦

数式の方からAB効果を考えていく。つまり，数学的に意味のはっきりしている式だけを書いていって，表題の問いにたいする答えを出したい。

1) ベクトル・ポテンシャルの簡単な例として，次のものを考える：

$$\vec{A}=(A_x,\ A_y,\ A_z)=\left(-\frac{\Phi}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2},\ \frac{\Phi}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2},\ 0\right)$$

ただし，ここで$\Phi>0$としておく。

通常の3次元空間からz軸を除いた部分をDであらわせば，$\vec{A}$の各成分は，Dの各点で普通の意味で微分できる関数であり，

$$\mathrm{rot}\vec{A}=0 \quad (D\text{の各点で})$$

が成り立っている。しかし，z軸上にはsingularityがあり，z軸をかこむループに沿って線積分をおこなうと，

$$\oint A_s\,ds=\Phi$$

が得られる。

この同じ物理的状況を記述するのに，次のようなやり方もできる：$\vec{A}$の各成分は，z軸をも含めた3次元空間の全体で局所可積分な関数であり，したがってシュヴァルツの超関数 distribution として取り扱うことができる。そしてこのとき，distributionの意味で

$$\mathrm{rot}\vec{A}=\vec{B} \quad (\text{全空間で})$$

が成り立つ。ここで

$$\vec{B}=(B_x,\ B_y,\ B_z)=(0,\ 0,\ \Phi\delta(x)\delta(y))$$

である。これは，z軸上にだけ存在する磁場を与えており，z軸をかこむループを縁にもつ面について積分すると，磁束

$$\iint B_n\,dS=\Phi$$

を得る。

第一の記述（z 軸を除いて考える，そのかわり普通の意味で微分できる関数だけを考える）では，χ を領域Dで微分可能な関数として，変換

$$\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} - \mathrm{grad}\,\chi$$

をゲージ変換とよぶ。$\mathrm{rot}\,\vec{A}$ と $\oint A_s\,ds$ はゲージ不変量である。ゲージ変換によって移れる$\vec{A}$と$\vec{A}'$はequivalentと言うことにすると，領域Dが単連結でないことから，$\mathrm{rot}\,\vec{A} = \mathrm{rot}\,\vec{A}'$が成立してもこれだけでは，$\vec{A}$と$\vec{A}'$がequivalentであることは結論できない。ポテンシャルのequivalent classを区別するためには，磁場 $\mathrm{rot}\,\vec{A}$ のほかに，もう一つのゲージ不変量$\oint A_s\,ds$ が必要である。第二の不変量の値が異なることから，最初に与えた$\vec{A}$は，$\vec{A}'=0$ とはequivalentでないことがわかる。

もう一方の記述（z 軸を含めて全空間を考えるが，ポテンシャルも場も一般にdistributionであってよいとし，微分もdistributionの意味のものとする）では，χ をdistributionとして，上と同じ式でゲージ変換を定義する。式は同じだが，意味は異なる。このゲージ変換で移れる$\vec{A}$と$\vec{A}'$をあらためてequivalentと言うことにすれば，ポテンシャルのequivalent classは，今度はただ一つの不変量 $\mathrm{rot}\,\vec{A}$ つまり磁場だけで区別できる。

2）領域Dで，次のシュレーディンガー方程式を解く：

$$\frac{1}{2m}(-i\hbar\,\mathrm{grad} - e\vec{A})^2\psi = E\psi$$

円筒座標 r, φ, z を使って書くと，

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} + i\alpha\right)^2\psi + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + k^2\psi = 0$$

ただし

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\ (E>0), \qquad \alpha = -\frac{e}{\hbar}\frac{\Phi}{2\pi}\ \ (e<0)$$

注意：　$\Phi > 0$ としたから，電子の場合に $\alpha > 0$ となる。

z に依存しない解 $\psi(r,\ \varphi)$ は，変数 φ について周期 2π の周期関数だから，次のようなフーリエ級数に展開できる：

$$\psi(r,\ \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\varphi_n(r)}{\sqrt{r}}e^{in\varphi}$$

そして，φ_nの方程式として次のものが得られる：

$$\frac{d^2\varphi_n}{dr^2}+\left[k^2-\frac{(n+\alpha)^2-\frac{1}{4}}{r^2}\right]\varphi_n=0$$

これは，De Alfaro とRegge の教科書“Potential Scattering”に出てくる方程式と形がまったく同じである。ただし，教科書の式には中心力のポテンシャルVがあるがそれがここでは0,そのかわり複素数の角運動量$\lambda=l+\frac{1}{2}$にあたるものがここでは実数の$n+\alpha$になっている。このようにパラメータの意味は違っているが，方程式の形は同じだから，数式的には同じ取り扱いができる。

以下，とくに$n=0$の場合を考え，$\varphi_0=\varphi$と書けば，次の方程式を解くことになる：

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\left[k^2-\frac{\alpha^2-\frac{1}{4}}{r^2}\right]\varphi=0$$

まず，$r=0$の近くの漸近解として$r^{\alpha+\frac{1}{2}}$と$r^{-\alpha+\frac{1}{2}}$の二つがあるが，$\alpha>0$の場合はじめの解はたしかに$r=0$（つまりz軸上）で0になる。この境界条件を満たす厳密解として

$$\varphi(\alpha,\ k,\ r)=\left(\frac{2}{k}\right)^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)\,r^{\frac{1}{2}}J_{\alpha}(kr)$$

が得られる。他方，rの大きいところの漸近解をもとにして，$f\to e^{-ikr}\ (r\to\infty)$となる解(いわゆるJost 解)：

$$f(\alpha,\ k,\ r)=\left(\frac{1}{2}\pi kr\right)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}i\pi(\alpha+\frac{1}{2})}H_{\alpha}^{(2)}(kr)$$

が得られる。

二つの解のWronskianとして計算されるJost関数は，

$$f(\alpha,\ k)=2^{\alpha}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\Gamma(\alpha+1)\,k^{-(\alpha-\frac{1}{2})}e^{-\frac{1}{2}i\pi(\alpha-\frac{1}{2})}$$

これを用いると，z軸上で0になる解φは$r\to\infty$のとき

$$\varphi(\alpha,\ k,\ r)\sim\frac{1}{2ik}\left[f(\alpha,\ k)\,e^{ikr}-f(\alpha,\ -k)\,e^{-ikr}\right]$$

と書きあらわせる。

ここで，

$$\frac{f(\alpha,k)}{f(\alpha,-k)}\,e^{-\frac{1}{2}i\pi}=e^{2i\delta(\alpha,k)}$$

とおいて$\delta(\alpha,\ k)$を定義すると，$\delta(\alpha,\ k)=-\frac{1}{2}\pi\alpha$（$k$にはよらない）が求められ，一方

$$\varphi(\alpha,\ k,\ r)\sim\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2}{k}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}\Gamma(\alpha+1)\sin\left[kr+\delta(\alpha,\ k)+\frac{1}{4}\pi\right]$$

と書き直せる。$\delta(0,k)=0$であることに注意すれば，$\delta(\alpha,\ k)$は，磁場の影響による位相のずれと解釈できる。

以上，取り扱ったのは円筒波の意味でのS波だけであるが，とにかく，z軸上にだけ存在する磁場によって電子の波が散乱され，そのときのphase shiftが0でないことが確認された。これは，AB効果と言ってよいだろう。

3）結論：　AB効果は理論的に可能である。このことは，従来の電磁気学と量子力学をそのまま使って言える。すなわち，Maxwell方程式とSchrödinger方程式の可能な解の一つに，このようなものが実際あるということである。

この場合，電子の波動関数はz軸上では0で，電子は磁場からのローレンツ力をまったく受けていない。だから，効果はもっぱらポテンシャルによると言ってよいが，しかし，ポテンシャルそれ自身に物理的意味があると言うのは正しくないだろう。Realityに対応するものは，“ポテンシャルのequivalent class”であると言うべきだろう。個々のポテンシャルはゲージの選び方で変わるが，equivalent classは変わらない。これはgauge independentな意味をもち，ゲージ不変量を使って区別できる。

SQUID ―― 巨視的量子性

東北大・理　藤　田　敏　三

§1. Introduction

最近，SQUID（超伝導量子干渉計）の特性改善が進み，固有雑音を単位帯域あたりのエネルギーに換算した値が，プランク定数hの数倍にまで近づいている。このような研究は，高感度計測素子としての分解能の限界に挑戦するという技術的意義をもつことは言うまでもない。一方，巨視系における状態のゆらぎが，量子論のゼロ点運動できまる値に迫っている例として，基礎的興味も深い。量子論が巨視的体系に適用できるかどうか必ずしも自明でないことを考えると，これを直接検証できるかも知れない具体例として，SQUIDのふるまいが注目されるのは当然であろう。つまり，SQUIDにSchrödingerの猫の役割を期待するのである。SQUID